

## 关于 Dirac 分布的幂

李程宽

(华中农业大学 武汉)

1  $\delta_n^a(x)$  ( $\text{Re } a > 0$ )选定  $\delta$ -序列  $\delta_n(x) = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/2} e^{-nx^2} \quad x \in \mathbb{R}$ 对任一固定复数  $a$ , 光滑函数  $f(x)$  的  $a$  阶导数定义如下:

$$D^a f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\beta-1} f^{(a-\beta)}(t) dt$$

这里  $\beta$  使得  $a + \beta$  为非负整数, 且使  $0 < \text{Re } \beta \leq 1$ ,  $a$  为固定实数, 可为  $-\infty$ , 视  $f$  是否具有紧文集或是否急降而定.为简单起见, 仅讨论  $a > 0$  的情形, 当  $a$  是复数时且  $\text{Re } a > 0$ , 讨论完全类似.文献 [1] 中已给出: 当  $k \leq a < k+1$  ( $k$  为正整数)  $\varphi \in D(\mathbb{R})$ , 有展式:  $\varphi(x) =$ 

$$\varphi(0) + \varphi'(0)x + \dots + \frac{1}{(k-1)!} \varphi^{(k-1)}(0)x^{k-1} + D^k \varphi(0)x^k + A(x_0)x^k$$

当  $a = k$  时,  $\beta = k-1$  项  $D^k \varphi(0)x^k$  重合于前一项,  $A(x_0)$  是与点  $x_0$  有关的常数在  $D(\mathbb{R})$  子空间  $D_{k-1} = \{\varphi(x) \in D(\mathbb{R}) : \varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(k-1)}(0) = 0\}$  上计算泛函值 (其中  $k = a - k - 1$ )

$$\langle \delta_n^a, \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{a/2} e^{-n x^2} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{a/2} e^{-n x^2} [D^k \varphi(0)x^k + A(x_0)x^k] dx. \quad \text{其中 } \beta = a - 1$$

$$\text{令 } x = \sqrt{\frac{1}{an}} y, \text{ 则 } \langle \delta_n^a, \varphi(x) \rangle = \left(\frac{1}{a\pi}\right)^{a/2} D^k \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} y^k dy + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{a/2} e^{-y^2} A\left(\frac{1}{an}\right) \frac{k+1}{2}$$

$$\cdot y^k dy. \text{ 因为 } a < k+1, \text{ 由积分绝对一致收敛性不难看出: } \lim_n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{a/2} e^{-y^2} A\left(\frac{1}{an}\right) \frac{k+1}{2}$$

$$y^k dy = 0, \text{ 所以 } \langle \delta_n^a, \varphi(x) \rangle = \lim_n \langle \delta_n^a, \varphi(x) \rangle = \left(\frac{1}{a\pi}\right)^{a/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} y^k dy D^k \varphi(0), \varphi \in D_{k-1}. \text{ 特别}$$

是, 当  $a = 2l$  ( $l$  为正整数) 时, 就有  $\langle \delta^{2l}, \varphi(x) \rangle = 0$ , 即  $\delta^{2l} = 0$ .

$$\text{利用公式: } \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} \quad (n \text{ 是正整数}), \text{ 可知: 当 } a = 2l+1 \quad (l$$

为正整数或 0) 时, 就有

\* 1986年5月29日收到, 陈庆益教授推荐.

$$\langle \delta^a, \varphi(x) \rangle = \left(\frac{1}{a\pi}\right)^{\frac{a}{2}} 2 \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2l} dy D^{2l} \varphi(0) = \left(\frac{1}{a\pi}\right)^{\frac{a}{2}} \frac{(2l-1)!! \sqrt{\pi}}{2^l} D^{2l} \varphi(0).$$

在  $0 < a < 1$  时, 令  $M = \text{Max}_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$ , 则  $\langle \delta_n^a, \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{a}{2}} e^{-anx^2} \varphi(x) dx$ . 所以, 当  $n \rightarrow \infty$

时  $|\langle \delta_n^a, \varphi \rangle| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{a}{2}} e^{-anx^2} dx \rightarrow 0$ . 因此,  $\delta^a = 0$  ( $0 < a < 1$ ). 综上所述可得:

**定理 1** 当  $0 < a < 1$  时  $\delta^a = 0$ . 当  $k < a < k+1$  ( $k$  为正整数) 时, 在  $\mathcal{D}_{k-1}$  有  $\langle \delta^a, \varphi(x) \rangle = C_a D^\beta \varphi(0)$ , 其中  $C_a = \left(\frac{1}{a\pi}\right)^{\frac{a}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} y^\beta dy$ ,  $\beta = a - 1$ . 特别当  $a = 2l$  时,  $\delta^a =$

$$0. \text{ 当 } a = 2l+1 \text{ 时, } \langle \delta^a, \varphi(x) \rangle = \left(\frac{1}{a\pi}\right)^{\frac{a}{2}} \frac{(2l-1)!! \sqrt{\pi}}{2^l} D^{2l} \varphi(0).$$

## 2. $\delta^a(x)$ ( $\text{Re } a > 0$ )

考察  $\delta_n(x) = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-nx^2}$  的导数, 对  $a > 0$  的实数讨论复数类似:  $\delta_n^a(x) = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-nx^2} (-2nx)$  取定一个分枝后, 可定义  $(-2)^a = e^{a \ln(-2)} = 2^a (\cos a\pi + i \sin a\pi)$ . 当  $0 < a < \frac{1}{2}$  时, 计算泛函值

$$\langle \delta_n^a(x), \varphi(x) \rangle = \{\text{Re}(-2)^a\} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{a}{2}} e^{-anx^2} n^a x^a \varphi(x) dx = 2^a \cos a\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{a}{2}} e^{-anx^2} n^a x^a \varphi(x) dx.$$

所以  $|\langle \delta_n^a(x), \varphi(x) \rangle| \leq 2^a \text{Max} |\varphi(x)| \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{a}{2}} n^a \left(\frac{1}{an}\right)^{\frac{a+1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} y^a dy \rightarrow 0$ . 当  $n \rightarrow +\infty$  时. 所以当  $0 < a < \frac{1}{2}$  时,  $\delta^a(x) = 0$ ; 当  $a = \frac{1}{2}$  时,  $\text{Re}(-2)^a = 0$ , 有  $\delta^{\frac{1}{2}}(x) = 0$ ; 当  $\frac{1}{2} < a < 1$  时  $\varphi(x) \in D_0(\mathbb{R})$ .  $\beta = 2a - 1$  计算泛函值

$$\langle \delta_n^a(x), \varphi(x) \rangle = \{\text{Re}(-2)^a\} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{a}{2}} e^{-anx^2} n^a x^a [\varphi(0) + D^\beta \varphi(0) x^\beta + Ax] dx.$$

令  $x = \sqrt{\frac{1}{an}} y$ , 则  $\langle \delta_n^a(x), \varphi(x) \rangle = 2^a \cos a\pi \cdot \pi^{-\frac{a}{2}} a^{-\frac{3a}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} y^{a+\beta} dy D^\beta \varphi(0) + 2^a \cos a\pi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{a}{2}} e^{-anx^2} n^a x^a Ax dx$ . 所以  $\langle \delta^a(x), \varphi(x) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \delta_n^a(x), \varphi(x) \rangle = C_a D^\beta \varphi(0)$ ,

$C_a = 2^a \cos a\pi \cdot \pi^{-\frac{a}{2}} a^{-\frac{3a}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} y^{a+\beta} dy$ . 一般说来: 当  $k \leq a < k + \frac{1}{2}$  时,  $\varphi \in D_{2k-1} = \{\varphi(x) | \varphi(0) = \dots = \varphi^{(2k-1)}(0) = 0\}$ ,  $\langle \delta^a, \varphi \rangle = C_a D^\beta \varphi(0)$ , 其中  $\beta = 2a - 1$ ,  $C_a = 2^a \pi^{-\frac{a}{2}} \cos a\pi \cdot a^{-\frac{3a}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} y^{a+\beta} dy$ ; 当  $k + \frac{1}{2} < a < k + 1$  时,  $\varphi \in D_{2k}$ ,  $\langle \delta^a(x), \varphi(x) \rangle = C_a D^\beta \varphi(0)$ , 其中  $\beta = 2a - 1$ ,  $C_a = 2^a \pi^{-\frac{a}{2}} \cos a\pi \cdot a^{-\frac{3a}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} y^{a+\beta} dy$ .

## 参 考 文 献

- [1] 陈庆益, Dirac分布的幂, 数学研究与评论, 1 (1981).
- [2] Leray T, Hyperbolic Differential Equations, Princeton, 1955, 24-25.