数学研究与评论
第八卷　第四期

# 广义函数的乘法*

程麟趾　　李程宽
（华中农业大学，武汉）

1950年，法国数学家L. Schwartz成功地引入了广义函数概念：具有紧支集的无穷次连续可微函数空间上的连续线性泛函．但如何定义任意两个广义函数的乘积问题一直未能得到圆满解决．从广义函数概念出发，易于定义无穷次可微函数与任意广义函数的乘积：

**定义 1**　设 $g$ 是 $C^\infty$ 函数，$f$ 是任意广义函数，则 $gf$ 定义为：

$$(gf,\varphi)=(fg,\varphi)\triangleq(f,g\varphi)\qquad \varphi\in\mathscr{D}$$

1971年，B. Fisher 给出了如下定义[1]：

**定义 2**　设 $f, g$ 是开区间 $(a,b)$ 上的广义函数，$F\in L^p(a,b)$，$g^{(r)}\in L^q(a,b)$，$p, q$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则在开区间 $(a,b)$ 上乘积 $fg$ 定义为：

$$fg=gf=\sum_{i=0}^{r}{}_rC_i(-1)^i\left[Fg^{(i)}\right]^{(r-i)},$$

其中 ${}_rC_i=\frac{r!}{i!(r-i)!}$，$f=F^{(r)}$，$F$ 是局部可积的．

**定义 3**　设 $\rho(x)$ 是一个固定的 $C^\infty$ 函数，满足下列条件：

(i) $\rho(x)=0$ 当 $|x|\geqslant 1$　　(ii) $\rho(x)\geqslant 0$

(iii) $\rho(x)=\rho(-x)$　　(iv) $\int_{-1}^{1}\rho(x)\,dx=1$

令 $\delta_n(x)=n\rho(nx)$，$f_n=f*\delta_n$，$g_n=g*\delta_n$，其中 $f, g$ 为 $(a,b)$ 上的两个广义函数．如果序列 $\{f_ng_n\}$ 是 $(a,b)$ 上正则序列（定义见文献[2]），则在 $(a,b)$ 上，$f$ 和 $g$ 的乘积定义为：

$$(fg,\varphi)=\lim_{n\to\infty}(f_ng_n,\varphi)\qquad \varphi\in\mathscr{D}$$

1980年，B. Fisher给出一种不可易的乘法定义（见文献[3]）：

**定义 4**　设 $f, g$ 是任意两个广义函数，$g_n=g*\delta_n$．如果极限 $\lim_{n\to\infty}(fg_n,\varphi)=\lim_{n\to\infty}(f,g_n\varphi)$ 存在，$\varphi\in\mathscr{D}(a,b)$，则称 $f$ 和 $g$ 在 $(a,b)$ 上的乘积存在，且 $(f\circ g,\varphi)=\lim_{n\to\infty}(f,g_n\varphi)$．

B. Fisher 在文献[1,3]中，研究了四种乘法定义之间的关系．证明了：定义 3 包含定义 2，定义 4 包含定义1,2且与定义 3 相互独立．另外，B. Fisher断言：定义 3 也包含定义 1．但我们未能见到其证明，下面我们给出一种证明．

**定理 1**　定义 3 包含定义 1．

**证明**　设 $g$ 是 $C^\infty$ 函数，$f$ 是任意广义函数，令 $f_n=f*\delta_n$，$g_n=g*\delta_n$，又设 $a(x)$ 是具有紧支集的 $C^\infty$ 函数，且 $a(x)=1$．当 $x\in\operatorname{supp}\varphi(x)$．显然有：

* 1986年7月10日收到、陈庆益教授推荐．

$$(f_n g_n, \varphi) = (f_n, g_n\varphi) = (f_n, g_n\varphi a(x)) = (a(x) f_n, g_n\varphi)$$

而$g_n\varphi$在$\mathscr{D}$中趋于$g\varphi$，$a(x)f_n$作为$S'$中的广义函数趋于$a(x)f$．由一个已知的定理（见[4]）："$\varphi_n \in S$，$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n \overset{S}{=} \varphi$，又$T_n \in S'$．$\lim\limits_{n\to\infty} T_n \overset{S}{=} T$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(T_n, \varphi_n) = (T, \varphi)$．"可知：$\lim\limits_{n\to\infty}(f_n g_n, \varphi) = (a(x) f, g\varphi) = (f, g\varphi)$．

由于定义4是非对称的，所以一般有$f\circ g \neq g\circ f$．

受均值思想的启发，我们给出一种满足可易性的广义函数乘法定义，并且分析了它与B．Fisher的乘法定义之间的关系，证明了此定义的广泛性，并用此定义计算了乘积：$x^{-r}\cdot\delta^{(r-1)}(x)$，$\operatorname{sgn}x|x|^\lambda\cdot\delta^{(2r)}(x)$，$|x|^\lambda\cdot\delta^{(2r+1)}(x)$和$x_+^{-r-1/2}\cdot x_-^{-r-1/2}$，简化了B．Fisher的计算过程．

**定义5**　设$f, g$是$(a, b)$上的两个广义函数，$\varphi\in\mathscr{D}(a, b)$．令$f_n = f*\delta_n$，$g_n = g*\delta_n$．如果极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(f, g_n\varphi) + (g, f_n\varphi)\}$存在，则定义乘积$f\cdot g$为：

$$(f\cdot g, \varphi) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(f, g_n\varphi) + (g, f_n\varphi)\}$$

显然，$f\cdot g = g\cdot f$．此外有：

**定理2**　定义5包含定义1和定义2．

**证明**　设$g$是$C^\infty$函数，$f$是任意广义函数．显然在$\mathscr{D}$中有：当$n\to\infty$时，$g_n\varphi\to g\varphi$，故$\lim\limits_{n\to\infty}(f, g_n\varphi) = (f, g\varphi)$．另外，$f_n$在$\mathscr{D}'$中（弱）收敛于$f$，故$\lim\limits_{n\to\infty}(g, f_n\varphi) = \lim\limits_{n\to\infty}(f_n, g\varphi) = (f, g\varphi)$．

按定义5有：

$$(f\cdot g, \varphi) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(f, g_n\varphi) + (g, f_n\varphi)\} = (f, g\varphi)．$$

即定义5包含定义1．

由[3]中定理2可推知：定义5也包含定义2．

**定理3**　若$f\cdot g$，$f\cdot g'$存在，则$f'\cdot g$也存在，并且有：$(f\cdot g)' = f\cdot g' + f'\cdot g$．

**定理4**　定义5和定义4是相互独立的．

我们列举两例来证明定理4．[3]已指出：当$r>1$且为正整数时，定义4不能定义$x^{-r}$和$\delta^{(r-1)}(x)$相乘$(r = 2, 3, \cdots)$．但用定义5不难算出$x^{-r}\cdot\delta^{(r-1)}(x) = (-1)^r(r-1)!/2(2r-1)!\cdot\delta^{(2r-1)}(x)$．此结果与B．Fisher按定义3计算所得结论相同（见[5]）．

反过来，按定义4有$\delta\circ x^{-2r+1} = 0$ $(r = 1, 2, \cdots)$．不难证明按定义5无法确定$\delta\cdot x^{-2r+1}$ $(r = 1, 2, \cdots)$，因为按定义5乘积$\delta\cdot x^{-2r+1}$是发散的．

定义5和定义3不是等价的．例如在子空间$D_0(R) = \{\varphi(x)\in D(R)\,|\,\varphi(0) = 0\}$上考察乘积$\delta'(x)\cdot\delta'(x)$．按定义5：$\delta'(x)\cdot\delta'(x) = 0$．而定义3无法定义$\delta'(x)$和$\delta'(x)$相乘．

下面我们用定义5来计算两个特殊的广义函数乘积，比较文献[2,6]计算过程较为简捷．

**定理5**　$|x|^\lambda\cdot\delta^{(2r+1)}(x) = 0$　当$\lambda = 2r$，$r = 0, 1, 2, \cdots$．

**证明**　$(|x|^\lambda\cdot\delta_n^{(2r+1)}, \varphi(x)) = \int_0^{1/n} x^\lambda\delta_n^{(2r+1)}(x)[\varphi(x) - \varphi(-x)]dx$．

由泰勒公式：$\varphi(x) - \varphi(-x) = 2\varphi'(0)x + \frac{\varphi'''(\theta x) + \varphi'''(-\theta x)}{3!}x^3$　上式化为：

$$(|x|^\lambda\delta_n^{(2r+1)}(x),\varphi(x)) = 2\varphi'(0)\int_0^{1/n} x^{\lambda+1}\delta_n^{(2r+1)}(x)\,dx + \int_0^{1/n} x^{\lambda+3}\frac{\varphi'''(\theta x)+\varphi'''(-\theta x)}{3!}\cdot$$

$\cdot\delta_n^{(2r+1)}(x)\,dx$,

而
$$I=\int_0^{1/n} x^{\lambda+1}\delta_n^{(2r+1)}(x)\,dx=\int_0^{1/n} x^{\lambda+1}n^{2r+2}\rho^{(2r+1)}(nx)\,dx.$$

令 $s=nx$, 则 $I=\dfrac{1}{n^{\lambda-2r}}\displaystyle\int_0^1 s^{\lambda+1}\rho^{(2r+1)}(s)\,ds\to 0$ 当 $n\to\infty$.

同理: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{1/n} x^{\lambda+3}\frac{\varphi'''(\theta x)+\varphi'''(-\theta x)}{3!}\delta_n^{(2r+1)}(x)\,dx=0$, 所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(|x|^\lambda\delta_n^{(2r+1)}(x),\varphi(x))=0$.

而
$$(\delta^{(2r+1)}(x),\ (|x|^\lambda*\delta_n)\varphi(x)) = -\sum_{i=0}^{2r+1}\frac{(2r+1)!}{i!(2r+1-i)!}(|x|^\lambda*\delta_n^{(i)})\varphi^{(2r+1-i)}(x)\Big|_{x=0}$$
$$= -\sum_{i=0}^{2r+1}\frac{(2r+1)!}{i!(2r+1-i)!}\int_{-1/n}^{1/n}|t|^\lambda\delta_n^{(i)}(t)\,dt\,\varphi^{(2r+1-i)}(0).$$

仿照上面可证: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-1/n}^{1/n}|t|^\lambda\delta_n^{(i)}(t)\,dt=0$, $0\leqslant i\leqslant 2r+1$. 故 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\delta^{(2r+1)}(x),\ (|x|^\lambda*\delta_n)\cdot$

$\varphi(x))=0$

由定义 5 可知: $|x|^\lambda\cdot\delta^{(2r+1)}(x)=0$, 当 $\lambda>2r$, $r=0,1,2,\cdots$. 类似地有:

**定理 6** $(\mathrm{sgn}x|x|^\lambda)\cdot\delta^{(2r)}(x)=0$, 当 $\lambda>2r-1$, $r=0,1,2,\cdots$.

**定理 7** $x_+^{-r-1/2}\cdot x_-^{-r-1/2}=\dfrac{(-1)^r\pi}{2(2r)!}\delta^{(2r)}(x)$, $r=0,1,2,\cdots$.

为了证明定理 7, 我们运用了下列组合恒等式(证明吸取了[7]中的技巧. 为了不使文章篇幅太长, 证明从略).

$$\sum_{j=0}^{r}\frac{r!}{j!(r-j)!}(-1)^jB\left(r+j+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=B\left(r+\frac{1}{2},\ r+\frac{1}{2}\right).$$

**定理 7 的证明** $x_-^{-r-1/2}=c_1\dfrac{d^r}{dx^r}x_-^{-1/2}$. 其中 $c_1=\dfrac{2^r}{1,3\cdots(2r-1)}$, $x_+^{-r-1/2}=c_2\dfrac{d^r}{dx^r}x_+^{-1/2}$,

其中 $c_2=(-1)^rc_1$. $x_-^{-r-1/2}*\delta_n=c_1x_-^{-1/2}*\delta_n^{(r)}=c_1\displaystyle\int_x^{1/n}(t-x)^{-1/2}\delta_n^{(r)}(t)\,dt$,

$$x_+^{-r-1/2}*\delta_n=c_2x_+^{-1/2}*\delta_n^{(r)}=c_2\int_{-1/n}^{x}(x-t)^{-1/2}\delta_n^{(r)}(t)\,dt.$$

按定义 5, 我们需要计算: $I_1=\dfrac{1}{2}\{(x_+^{-r-1/2},\ (x_-^{-r-1/2}*\delta_n)\varphi(x))+(x_-^{-r-1/2},\ (x_+^{-r-1/2}*\delta_n)\cdot$

$\varphi(x))\}$ 的值:

$$(x_+^{-r-1/2},\ (x_-^{-r-1/2}*\delta_n)\varphi(x)) = c_1c_2(-1)^r\sum_{j=0}^{r}\frac{r!}{j!(r-j)!}\int_0^{1/n}x^{-1/2}\int_x^{1/n}$$

$$(t-x)^{-1/2}\delta_n^{(r+j)}(t)\,dt\,\varphi^{(r-j)}(x)\,dx = c_1c_2(-1)^r\sum_{j=0}^{r}\frac{r!}{j!(r-j)!}\int_0^{1/n}\delta_n^{(r+j)}(t)\,dt\int_0^{x}$$

$$x^{-1/2}(t-x)^{-1/2}\varphi^{(r-j)}(x)\,dx,$$

$$(x_-^{-r-1/2},\ (x_+^{-r-1/2}*\delta_n)\varphi(x)) = c_1c_2(-1)^r\sum_{j=0}^{r}\frac{r!}{j!(r-j)!}\int_0^{1/n}\delta_n^{(r+j)}(t)\,dt\int_0^{t}$$

$x^{-1/2}(t-x)^{-1/2}(-1)^{r+j}\varphi^{(r-j)}(-x)\,dx$,

$$I_1=\frac{1}{2}c_1c_2(-1)^r\sum_{j=0}^{r}\frac{r!}{j!(r-j)!}\int_0^{1/n}\delta_n^{(r+j)}(t)\,dt\int_0^t x^{-1/2}(t-x)^{-1/2}[\varphi^{(r-j)}(x)$$

$$+\ (-1)^{r+j}\varphi^{(r-j)}(-x)]dx.$$

由泰勒展式可知： $\varphi^{(r-j)}(x)+(-1)^{r+j}\varphi^{(r-j)}(-x)=\sum_{i=0}^{j+r}\frac{1}{i!}[\varphi^{(r-j+1)}(0)+$

$$(-1)^{r+j+i}\varphi^{(r-j+i)}(0)]x^i+\frac{1}{(j+r+1)!}[\varphi^{(2r+1)}(\xi x)-\varphi^{(2r+1)}(-\xi x)]x^{j+r+1}.$$

不难看出：

$$\lim_{n\to\infty}c_1c_2(-1)^r\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{r}\frac{r!}{j!(r-j)!}\int_0^{1/n}\delta_n^{(r+j)}(t)\,dt\int_0^t x^{-1/2}(t-x)^{-1/2}\frac{1}{(j+r+1)!}$$

$$[\varphi^{(2r+1)}(\xi x)-\varphi^{(2r+1)}(-\xi x)]x^{j+r+1}dx=0,$$

和 $$c_1c_2(-1)^r\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{r}\frac{r!}{j!(r-j)!}\int_0^{1/n}\delta_n^{(r+j)}(t)\,dt\int_0^t x^{-1/2}(t-x)^{-1/2}\sum_{i=0}^{j+r-1}$$

$$[\varphi^{(r-j+i)}(0)+(-1)^{r+j+i}\varphi^{(r-j+i)}(0)]\frac{1}{i!}x^i\,dx=0.$$

$$\lim_{n\to\infty}I_1=\lim_{n\to\infty}c_1c_2(-1)^r\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{r}\frac{r!}{j!(r-j)!}\int_0^{1/n}\delta_n^{(r+j)}(t)\,dt\int_0^t x^{-1/2}(t-x)^{-1/2}$$

$$\frac{2\varphi^{(2r)}(0)}{(j+r)!}x^{j+r}dx.$$

由分部积分得

$$\int_0^{1/n}\delta_n^{(r+j)}(t)\,dt\int_0^t x^{-1/2}(t-x)^{-1/2}\frac{2\varphi^{(2r)}(0)}{(j+r)!}x^{j+r}dx=\frac{2\varphi^{(2r)}(0)}{(j+r)!}\int_0^{1/n}$$

$$\delta_n^{(r+j)}(t)t^{j+r}dt\,B\left(r+j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=(-1)^{r+j}B\left(r+j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\varphi^{(2r)}(0)$$

将上式代入上式，并利用组合恒等式即得：

$$x_+^{-r-1/2}\cdot x_-^{-r-1/2}=c_1c_2(-1)^r\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{r}\frac{r!}{j!(r-j)!}(-1)^{r+j}B\left(r+j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\varphi^{(2r)}(0)$$

$$=\frac{(-1)^r\pi}{2(2r)!}\delta^{(2r)}(x).$$

感谢陈庆益教授对本文的热情关注.

## 参 考 文 献


[1] B. Fisher, Quart. J. Math. Oxford, 22 no.2 (1971), 291—298.

[2] B. Fisher, Proc. Camb. phil. Soc., 71(1972), 123—130.

[3] B. Fisher, Math. Nachr., 99(1980), 239—249.

[4] 李邦河，中国科学，No.1 (1978)，1—10.

[5] B. Fisher, Proc. Camb. Phil. Soc., 72(1972), 201—204.

[6] B. Fisher, Proc. Camb. Phil. Soc., 73(1973), 317—325.

[7] 徐利治、王兴华，数学分析的方法及例题选讲(修订版)，1984年2月出版.