第5卷 第4期
1992年 10月

应用数学
MATHEMATICA APPLICATA

Vol. 5 No. 4
October 1992

# 广义函数的卷积*

程麟趾 李程宽

(华中农业大学 武汉 430070)

在古典分析中，已引入：

**定义1** 设$f\in L_p(-\infty,+\infty)$，$g\in L_q(-\infty,+\infty)$，其中$1\leqslant p,q\leqslant+\infty$，满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则$f$和$g$的卷积定义为：

$$f*g=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)\mathrm{d}t.$$

利用直积的概念，Schwartz L. 给出了广义函数卷积的一般定义[1].

**定义2** 设$f,g$是两个广义函数，定义$f$和$g$的卷积为：

$$(f*g,\varphi)=(f(x)\times g(y),\varphi(x+y)),\varphi\in D.$$

但是，在这里要指出，$\varphi(x+y)$已经不是$(x,y)$空间中的具有有界支集的函数，因而一般地说，定义2是没有意义的.

但对下面两种情况，定义2是有意义的.

(1)广义函数$f,g$之一的支集是有界的；

(2)两个广义函数$f,g$的支集都是同一方向有界的.

1973年Jones D S.[2]研究了广义函数卷积，给出了另外一种广义函数卷积定义.

**定义3** 令$\mathscr{T}(x)$是满足下列条件的无穷可微函数：

(i)$\mathscr{T}(x)=\mathscr{T}(-x)$； (ii)$0\leqslant\mathscr{T}(x)\leqslant1$；

(iii)$\mathscr{T}(x)=1$ 当$|x|\leqslant\frac{1}{2}$；(iv)$\mathscr{T}(x)=0$ 当$|x|\geqslant1$，

对任意广义函数$f(x),g(x)$，记$f_n(x)=f(x)\mathscr{T}(\frac{x}{n})$，$g_n(x)=g(x)\mathscr{T}(\frac{x}{n})$. 若极限$\lim\limits_{n\to\infty}(f_n*g_n,\varphi)=(h,\varphi)$，$\varphi\in D$存在并且有限，则定义$f$和$g$的卷积为$f*g=h$.

Jones证明了：定义3是定义1和定义2中情况(1)和(2)的延拓.

1982年，Brian Fisher[3]又给出一种非对称的卷积定义，其基本思想类似于文献[4]中的乘法定义.

**定义4** 若$f,g$是两个广义函数，记$f_n(x)=f(x)\mathscr{T}(\frac{x}{n})$. 如果极限$\lim\limits_{n\to\infty}(f_n*g,\varphi)=(h,\varphi)$，$\varphi\in D$存在并有限. 则定义$f$和$g$的卷积$f\otimes g=h$.

受广义函数乘法定义的启发[5]，本文引出一个满足可易性的广义函数卷积定义.

* 收稿日期：1989－01－09 修订日期：1989－03－25

**定义 5** 设 $f,g$ 是两个广义函数，记 $f_n(x)=f(x)\mathscr{T}(\frac{x}{n})$. $g_n(x)=g(x)\mathscr{T}(\frac{x}{n})$. 若极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(f_n*g,\varphi)+(g_n*f,\varphi)\}=(h,\varphi),\varphi\in D$$

存在且有限，则定义 $f$ 和 $g$ 的卷积为 $f\,\overline{*}\,g=h$.

**定理 1** 定义 5 是定义 1 和定义 2 中的情况(1)和(2)的延拓.

**证明** 文献[3]中证明了 $f\otimes g=f*g$.

由于 $f*g=g*f$，所以在定义 1 和定义 2 中的情况(1)和(2)下有 $f\otimes g=g\otimes f$，即有

$$(f\,\overline{*}\,g,\varphi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(f_n*g,\varphi)+(g_n*f,\varphi)\}=(f*g,\varphi).$$

**定理 2** 定义 5 和定义 4 是相互独立的.

**证明** 用定义 5 不难计算 $x^r$ 和 $\mathrm{sgn}x\cdot x^r$ 的卷积为

$$x^r\,\overline{*}\,(\mathrm{sgn}x\cdot x^r)=\frac{(r!)^2}{(2r+1)!}x^{2r+1},\quad r=0,1,2,\cdots.$$

考虑和 $(x^r\cdot\mathscr{T}(\frac{x}{n}))*(\mathrm{sgn}x\cdot x^r)+(\mathrm{sgn}x\cdot x^r\mathscr{T}(\frac{x}{n}))*x^r=2\int_0^x(x-t)^rt^r\mathscr{T}(\frac{t}{n})\mathrm{d}t$，即得到

$$(x^r\,\overline{*}\,(\mathrm{sgn}x\cdot x^r),\varphi)=\lim_{n\to\infty}(\int_0^x(x-t)^rt^r\mathscr{T}(\frac{t}{n})\mathrm{d}t,\varphi(x)).$$

由于 $\varphi(x)$ 是有紧支集的，和 $\mathscr{T}(x)=1$，当 $|x|\leqslant\frac{1}{2}$ 时，所以 $\lim_{n\to\infty}(\int_0^x(x-t)^rt^r\mathscr{T}(\frac{x}{n})\mathrm{d}t,\varphi(x))$ $=(\int_0^x(x-t)^rt^r\mathrm{d}t,\varphi(x))=\frac{(r!)^2}{(2r+1)!}(x^{2r+1},\varphi(x))$. 此结果与 Fisher 用定义 3 计算所得结论相同.[6]

我们证明定义 4 不能定义 $(\mathrm{sgn}x\cdot x)\otimes x$. 事实上

$$\left(\mathrm{sgn}x\cdot x\mathscr{T}(\frac{x}{n})\right)*x=2xn^2\int_0^1 w\mathscr{T}(w)\mathrm{d}w,$$

选择 $\varphi(x)$. 使 $\int_{-\infty}^{+\infty}x(\varphi)\mathrm{d}x\neq 0$，则

$$((\mathrm{sgn}x\cdot x)\otimes x,\varphi)=\lim_{n\to\infty}2n^2\int_0^1 w\mathscr{T}(w)\mathrm{d}w\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x=\infty.$$

顺便指出：这里也显示了定义 3 和定义 4 的差别.

反过来，文献[3]中已证明

$$x^{2r}\otimes\mathrm{sgn}x=\frac{2x^{2r+1}}{2r+1},\qquad r=0,1,2,\cdots.$$

但定义 5 不能定义 $x^2$ 和 $\mathrm{sgn}x$ 的卷积. 即 $x^2\,\overline{*}\,\mathrm{sgn}x$ 是发散的. 证毕

考察卷积：$1*(\mathrm{sgn}x\cdot x)$ 和 $1\,\overline{*}\,(\mathrm{sgn}x\cdot x)$，可知定义 5 和定义 3 两者并不一致.

最后，我们指出定义 3 和定义 4 也是相互独立的.

定理 2 中已述卷积 $(x\mathrm{sgn}x)\otimes x$ 是发散的. 但[6]中已证

$$(\mathrm{sgn}x\cdot x^r)*x^r=\frac{(r!)^2}{(2r+1)!}x^{2r+1}.$$

反过来 $x^{2r+1}\otimes 1=0$[3]，$r=0,\pm1,\pm2,\cdots$，但 $x*1$ 是发散的，事实上

$$(x*1,\varphi)=\lim_{n\to\infty}((x\mathscr{T}(\frac{x}{n}))*\mathscr{T}(\frac{x}{n}),\varphi),$$

而 $(x\mathscr{T}(\frac{x}{n}))*\mathscr{T}(\frac{x}{n})=n^2\int_{-1}^{1}w\mathscr{T}(w)\mathscr{T}(\frac{x}{n}-w)\mathrm{d}w$，显然，对任意常数 $C>0$，只要 $|x|\leqslant C$，就有

$$\lim_{n\to\infty}n\int_{-1}^{1}\mathscr{T}(\frac{x}{n}-w)w\mathscr{T}(w)\mathrm{d}w=\frac{x}{2}\int_{-1}^{1}\mathscr{T}^2(w)\mathrm{d}w,$$

选择 $\varphi(x)$ 使 $\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x\neq 0$，则

$$(x*1,\varphi)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\int_{-1}^{1}\mathscr{T}^2(w)\mathrm{d}w\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x=\infty.$$

感谢陈庆益教授对本文的热情关注.

## 参　考　文　献


1 Gelfand I M, Shilov G E. Generalized Fuctions. Vol. I. Academic press, 1964.

2 Jones D S. The Convolution of Generalized Functions. Quart. J. Math., Oxford, 1973, 24(2): 145～163

3 Fisher B. On Defining the Convolution of Distributions. Math. Nachr., 1982, 106: 261～268

4 Fisher B. A Non-commutative Neutrix Product of Distributions. Math. Nachr., 1982, 108: 117～127

5 程麟趾，李程宽. 广义函数的乘积. 数学研究与评论，1988(4): 543～546

6 Fisher B. A Result of the Convolution of Distributions. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1975, 19: 393～395


程麟趾，男，57 岁，教授，研究方向：广函乘积及卷积.

李程宽，男 32 岁，讲师，研究方向：广函乘积及卷积.

# 第四次全国稳定性会议在烟台召开

由中国数学会委托中科院应用数学所和烟台师院举办的第四次全国稳定性学术会议，1992 年 8 月 14 日至 19 日在烟台召开，与会代表 160 余人，年轻人占一半.

会上介绍了李雅普诺夫的生平事迹，以纪念这位杰出科学家的著名博士论文“运动稳定性的一般问题”发表 100 周年.

会议交流了研究成果，还就今后进一步开展工作各抒已见，畅所欲言，形式生动活泼.

黄启昌、李森林教授送来贺信. 会上还展示了 90 高龄的苏步青教授书赠秦元勋教授的条幅. 高度赞扬他为推动我国常微研究和应用作出了长期艰苦的努力.

有 41 个单位和个人给大会提供资助，受到好评.

会议学术论文集已由科学出版社出版发行.

（小月）